

Stellenwertsysteme

Stellenwertsysteme zeichnen sich dadurch aus, dass sie jeder Ziffernposition einen bestimmten Wert zuordnen.

Dezimalsystem

Das Dezimalsystem ist ein Stellenwertsystem mit der Basis 10. In ihm stehen an der hintersten Stelle die Einer, davor die Zehner, davor die Hunderter, davor die Tausender usw. Die zugrundeliegenden Zahlen 1, 10, 100, 1000, ... sind *Potenzen* der Zahl 10. Bei einer Zahl wie 573 gibt es 5 Hunderter, 7 Zehner und 3 Einer, also

$$5 * 10^2 + 7 * 10^1 + 3 * 10^0 = 500 + 70 + 3 = 573.$$

Der Wert der Zahl ergibt sich, wenn man die Ziffer an der Position i mit der Zahl 10^i multipliziert und dann alle Ergebnisse addiert.

Dieses Verfahren ist das Besondere an allen Stellenwertsysteme: Die Ziffer an Position i wird mit der i -ten Potenz der Basis multipliziert und alle Ergebnisse werden addiert. Für das Beispiel gilt also

Position i	Ziffer an der Position i	i -te Potenz von 10	Produkt
2	5	$10^2 = 100$	500
1	7	$10^1 = 10$	70
0	3	$10^0 = 1$	3
			573

Binärsystem

Das in der Informatik häufig verwendete Binärsystem benutzt als Basis die Zahl 2. Die 573 von oben heißt im Binärsystem 1000111101. Das lässt sich überprüfen, indem wieder jede Ziffer an der Position i mit der i -ten Potenz der Basis multipliziert und alles addiert wird.

Position i	Ziffer an der Position i	i -te Potenz von 2	Produkt
9	1	$2^9 = 512$	512
8	0	$2^8 = 256$	0
7	0	$2^7 = 128$	0
6	0	$2^6 = 64$	0
5	1	$2^5 = 32$	32
4	1	$2^4 = 16$	16
3	1	$2^3 = 8$	8
2	1	$2^2 = 4$	4
1	0	$2^1 = 2$	0
0	1	$2^0 = 1$	1
			573

Hexadezimalsystem

Ein anderes Zahlensystem, das in der Informatik häufig verwendet wird, ist das Hexadezimalsystem. Seine Basis ist die Zahl 16. Das bringt die Besonderheit mit sich, dass unsere bekannten Ziffern von 0-9 dafür nicht ausreichen. Man nimmt deshalb einfach die Buchstaben A bis F hinzu. D ist zum Beispiel eine

Ziffer in diesem System und steht für die Zahl 13. Die Zahl 573 von oben ist dann 23D. Zum Beweis:

Position i	Ziffer an der Position i	i-te Potenz von 16	Produkt
2	2	$16^2 = 256$	512
1	3	$16^1 = 16$	48
0	D (=13)	$16^0 = 1$	13
			573

Beliebige Stellenwertsysteme

Als Basis kann man jede Zahl nehmen, die gerade passend erscheint. Meistens ist es eine der Zahlen 2, 10 oder 16. Aber denkbar wäre zum Beispiel auch ein Zahlensystem mit der Basis 36. Als Ziffern dienen 0 bis 9 und die 26 großen Buchstaben von A bis Z. Die Zahl 573 lautet dann FX:

Position i	Ziffer an der Position i	i-te Potenz von 36	Produkt
1	F (=15)	$36^1 = 36$	540
0	X (=33)	$36^0 = 1$	33
			573

Allgemeine Darstellung

Eine Zahl z in einem Stellenwertsystem zur Basis B wird allgemein so dargestellt

$$z = \sum_{i=0}^n b_i * B^i = b_0 * B^0 + b_1 * B^1 + b_2 * B^2 \dots$$

Rückumwandlung

Wie eine Zahl aus einem anderen System ins Dezimalsystem gewandelt wird, ist jetzt klar. Der umgekehrte Weg funktioniert anders. Soll eine Dezimalzahl in einem anderen Stellenwertsystem mit der Basis B dargestellt werden, teilt man die Dezimalzahl so lange durch B, bis 0 herauskommt. Wichtig ist dabei, den Rest der Division aufzuschreiben. Dieser ergibt schließlich die Zahl im System mit der Basis B.

Die Umwandlung der Zahl 573 in das System mit der Basis 8 (mit dem Namen Oktalsystem) läuft so ab

Zahl	geteilt durch 8	Rest
573	71	5
71	8	7
7	1	0
1	0	1

Das Ergebnis wird von unten nach oben abgelesen und lautet 1075.

Kommazahlen

Bisher wurden nur ganze Zahlen umgewandelt. Eine Kommazahl aus einem anderen Zahlensystem ins Dezimalsystem zu wandeln, ist leicht. Während die Stellen vor dem Komma die Position 2, 1 und 0 haben, geht es nach dem Komma mit -1, -2, -3 usw. weiter. Die Kommazahl 2B,3E ist also

Position i	Ziffer an der Position i	i-te Potenz von 16	Produkt
1	2	$16^1 = 16$	32,000000
0	B (=11)	$16^0 = 1$	11,000000
-1	3	$16^{-1} = 0,0625$	0,1875000
-2	E (=14)	$16^{-2} = 0,00390625$	0,0546875
			43,2421875

Dabei wurde das Potenzgesetz beachtet, das lautet $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$.

Etwas schwieriger ist es, eine Dezimalzahl in ein anderes Zahlensystem umzuwandeln. Dazu wird der Vorkommaanteil wie oben beschrieben umgewandelt und für den Nachkommaanteil kommt das Verfahren der fortlaufenden Multiplikation zum Einsatz. Dazu wird der Nachkommaanteil immer wieder mit der Basis multipliziert.

Dezimalsystem

Stellenwertsystem mit der Zahl 10 als Basis. Dies ist das normale, im Alltag verwendete Zahlensystem

Potenz

Eine Potenz besteht aus zwei Teilen: Der Basis und dem Exponenten. Man schreibt $Basis^{Exponent}$ und spricht das als „Basis hoch Exponent“ aus. Eine Potenz x^y bedeutet, dass die Zahl x immer wieder mit sich selbst multipliziert werden soll, und zwar y Mal. 5^3 bedeutet beispielsweise, dass die Zahl 5 insgesamt 3 Mal mit sich selbst multipliziert werden soll: $5^3 = 5 * 5 * 5 = 125$.

Rest der Division

Wenn man zwei ganze Zahlen durch einander teilt, kann das entweder glatt aufgehen oder es entsteht ein Rest. Teilt man 23 durch 5 dann entsteht der Rest 3, da die 5 vier Mal in die Zahl 20 hineinpasst. Die 3 bleibt über und heißt Rest.